2008年　東大数学　文系第1問

$f(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ ← 不明量は2つ。

① $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ より ← 等式が1本。

$\int_{-1}^{1} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx = 1$　　2−1=1 なので、1つ分の不明量が残る。

$2\int_{0}^{1} (x^2 + \alpha\beta)\,dx = 1$　　問題文に「Sをαで表し」とあるので、

$2\left[\frac{1}{3}x^3 + \alpha\beta x\right]_0^1 = 1$　　βを消し、αを残す。

$\frac{2}{3} + 2\alpha\beta = 1$

$\therefore\ \alpha\beta = \frac{1}{6}$ …①′　この時点で $\beta = \frac{1}{6\alpha}$ としてもよい。但し αの和を忘れないこと。

② $S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ の最大値を求める。

xで積分するので、xは残らない。

αを代入するので、αは必ず残る。

$= \int_0^{\alpha} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx$

※代入は最後が原則 だが、さすがにこれは $\frac{1}{6}$ の方がカンタンなので代入。

代入

$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2 + \frac{1}{6}x\right]_0^{\alpha}$

$= \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha$

$= \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2\beta + \frac{1}{6}\alpha$

代入

$= -\frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\alpha$

$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha$

$\beta = \frac{1}{6\alpha}$ を代入せずとも、$\alpha\beta = \frac{1}{6}$ を代入すればよかった。βが自動的に消えた。

$\alpha \neq 0$ のとき、　$\alpha\beta = \frac{1}{6}$ は $\alpha = 0$ を満たさない

$\boxed{\text{αの定義域の求め方}}$

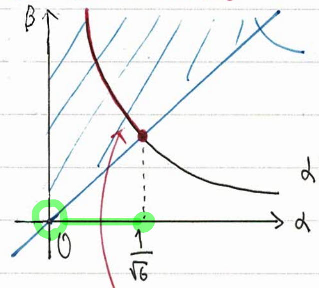
$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ に $\beta = \frac{1}{6\alpha}$ を代入して、　αの定義域をもとめるために、この代入は必要。

$0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{6\alpha}$　　$\alpha^2 \leqq \frac{1}{6}$　　$0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$

また $\alpha\beta = \frac{1}{6}$ から $\alpha \neq 0$　$\therefore\ 0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$　αの定義域

$\boxed{\text{別解：αの定義域の求め方}}$

α、βの2文字から範囲を求めるときは領域図示が使える。



$\beta \geqq \alpha \geqq 0$ の領域

$\alpha\beta = \frac{1}{6}$（反比例）

赤線の部分が $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ かつ $\alpha\beta = \frac{1}{6}$ の部分

よって、上図から、$0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$

$S = -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha$　$\left(0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ の最大値なので、← あとはただの3次関数

$S' = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{12}$

$= -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{6}\right) \geqq 0$　$\left(\because\ 0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

よって、Sは単調増加とわかり、$\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のときSが最大。

以上より、Sの最大値は、$S = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3 + \frac{1}{12} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{108}$